

کارایی مدل‌های فرکتالی در برآورد توزیع اندازه ذرات خاک

سودا شعبانی^۱، کامران زینال زاده^{۲*}، الناز رضایی^۳

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۰۹)

چکیده

توزیع اندازه ذرات یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های فیزیکی خاک بوده که تعیین آن با روش‌های کم‌هزینه، سریع و دقیق، ضروری می‌باشد. در این پژوهش، کارایی هفت مدل فرکتال در برآورد مشخصه‌های توزیع اندازه ذرات ۴۰ نمونه در پنج بافت خاک شامل رسی، لومرسی، رس‌سیلتی، لوم‌شنی و لوم‌رسی‌شنی با استفاده از شاخص‌های آماری مختلف بررسی شد. برای این منظور، ۲۸ نقطه از منحنی دانه‌بندی با استفاده از روش الک و روش هیدرومتری برای هر نمونه خاک اندازه‌گیری گردید. برازش مدل‌های مورد مطالعه از طریق رگرسیون غیرخطی و با استفاده از برنامه Matlab انجام شد. نتایج پژوهش، تأثیر بافت خاک را روی مقدار بعد فرکتال نشان داد. در بین مدل‌های مورد مطالعه، مدل پریر و همکاران (۱۹۹۹) بیشترین خطای برازش را برای تمام بافت خاک‌ها داشت. همچنین، مدل‌های بیرد و همکاران (۲۰۰۰)، پریر و بیرد (۲۰۰۲) و کراوچنکو و ژانگ (۱۹۹۸) بهترین عملکرد را در برآورد بعد فرکتال داشتند. شاخص‌های آماری نشان دادند که مدل‌های فرکتال دو پارامتری نسبت به مدل‌های تک پارامتری برازش بهتری به منحنی توزیع ذرات خاک دارند. مدل‌های توزیع اندازه ذرات مطالعه شده، در ارزیابی مقادیر D_{50} و D_{60} نسبتاً دقیق بودند. نتایج این پژوهش نشان داد که مدل‌های فرکتالی می‌توانند قابلیت قابل قبولی در برآورد مشخصه‌های توزیع اندازه ذرات خاک داشته باشند.

واژه‌های کلیدی: بافت خاک، فرکتال، محیط متخلخل، مدل‌های توزیع اندازه ذرات، ویژگی‌های فیزیکی خاک

شعبانی س.، زینال‌زاده ک.، رضایی ا. ۱۳۹۹. کارایی مدل‌های فرکتالی در برآورد توزیع اندازه ذرات خاک. تحقیقات کاربردی خاک. جلد ۸، شماره ۴. صفحه: ۱۵۸-۱۶۸.

۱- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی و منابع طبیعی دانشگاه ارومیه
 ۲- دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی و منابع طبیعی دانشگاه ارومیه (مکاتبه کننده)
 ۳- فارغ التحصیل دکتری گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی و منابع طبیعی دانشگاه ارومیه
 *پست الکترونیک: k.zeinalzadeh@urmia.ac.ir

مقدمه

هیپربولیک (Aswathy & Mathew, 2019)، نمایی، توانی، لگاریتمی، توزیع آماری و فرکتالی ارائه شده‌اند (Bayat *et al.*, 2015). پژوهشگران زیادی تلاش نموده‌اند تا با بیان مناسب و تعریف کامل‌تری از مفهوم فرکتال، اطلاعات دقیق‌تر و بیشتری در مورد PSD بدست آورند. مفهوم فرکتالی توزیع اندازه ذرات خاک، یک رابطه توانی بین تعداد و قطر ذرات را نشان می‌دهد و معمولاً به صورت میزان تجمعی ذرات بزرگتر از یک قطر معین در مقابل آن قطر را ارائه می‌نماید (Xiao *et al.*, 2014). تیلر و ویت‌کرفت (Tyler & Wheatcraft, 1989) گزارش کردند که تعیین بعد فرکتال براساس جرم ذرات خاک، غالباً منجر به بیش-برآوردی مقادیر آن می‌شود. مدل‌های فرکتالی را می‌توان به مدل‌های تک بخشی و دو بخشی تقسیم نمود. در این تقسیم‌بندی، مدل‌های مندلبرت (Mandelbrot, 1983)، پریر و همکاران (Perrier *et al.*, 1999)، پریر و بیرد (Perrier & Bird, 2002)، همکاران (Bird *et al.*, 2000)، کراوچنکو و ژانگ (Kravchenko & Zhang, 1998)، تیلر و ویت‌کرفت (Tyler & Wheatcraft, 1989) و سو و همکاران (Su *et al.*, 2004) جزء مدل‌های تک بخشی قرار می‌گیرند. در این مدل‌ها، فقط یک بعد فرکتال (D) برازش داده می‌شود. از طرفی دیگر، در مدل‌های دوبخشی مانند مدل میلان و همکاران (Millan *et al.*, 2003)، دو بعد فرکتال مختلف برازش داده می‌شوند. این دو بعد فرکتال مربوط به جریان کاپیلاری و جریان غشایی موجود در محیط می‌باشند. در سال‌های اخیر، پژوهش‌های مختلفی برای مقایسه مدل‌های PSD انجام شده است (Bayat *et al.*, 2015; Afrasiabi *et al.*, 2019; Millan *et al.*, 2003). اسماعیل‌نژاد و همکاران (Esmaelnejad *et al.*, 2016) قابلیت برازش برخی مدل‌های PSD را بررسی نمودند. آنها نشان دادند که مدل سه پارامتری ویبول برای تمامی نمونه‌های خاک در کلاس‌های بافتی رسی و لومی، دقت بالایی دارد. همچنین، آنها بیان نمودند پس از مدل ویبول، مدل‌های فردلاندا، روزین-رملر و ون گنوختن در رتبه‌های بعدی از لحاظ دقت برازش قرار دارند. بیات و همکاران (Bayat *et al.*, 2015) با به کارگیری پایگاه اطلاعاتی UNSODA نشان دادند مدل‌های دو و سه

بسیاری از ویژگی‌های فیزیکی و مکانیکی خاک تابعی از جنس، شکل، اندازه و چگونگی توزیع اندازه ذرات (PSD) خاک است. PSD یکی از ویژگی‌های اساسی فیزیک خاک بوده و تفسیر جامع‌تری از بافت خاک ارائه می‌کند (Afrasiabi *et al.*, 2019). این پارامتر در علوم مختلف مانند هیدرولوژی، ژئوفیزیک، شیمی و بیولوژی کاربرد دارد (Shi *et al.*, 2012; Figueira *et al.*, 2006). نحوه توزیع دانه‌بندی ذرات در محیط متخلخل، بر ویژگی‌های هیدرولیکی (Hwang, 2004)، ظرفیت سدیم قابل تبادل (Ersahin *et al.*, 2006)، سطح ویژه ذرات و هدایت هیدرولیکی اشباع و غیراشباع (Vipulanandan & Ozgurel, 2009; Vereecken *et al.*, 2010) حرکت آب و املاح در خاک (Ghafoor *et al.*, 2013)، تراکم (Obour *et al.*, 2017)، تخلخل (Nimmo, 2004)، پارامترهای جذب شیمیایی (Khodaverdiloo & Samadi, 2011) و نفوذ (Ghorbani Dashtaki *et al.*, 2010) تأثیرگذار است.

برای پیش‌بینی ویژگی‌ها و عملکرد خاک‌های مختلف، اغلب به برخی از داده‌های مربوط به بافت خاک، به اطلاعاتی بیشتر از درصدهای شن و سیلت و رس نیاز است. بنابراین، مطالعات زیادی برای بیان جزئیات بیشتر در رابطه با PSD خاک انجام شده است. به عنوان مثال، ضریب یکنواختی (Cu)، ضریب انحنا (Cc) و قطر ذرات خاک که درصد مشخصی از ذرات کوچکتر را دارند، مانند D_{10} ، D_{30} و D_{60} (D_{10} اندازه‌ای که ۱۰ درصد از ذرات خاک از آن کوچکتر هستند)، می‌توان به عنوان پارامترهایی موثر در فعالیت‌های مهندسی به کار برد. از طرفی ارائه داده‌های PSD مزایای بسیاری در مکانیک خاک، فیزیک، کاربردهای هیدرودینامیکی و ژئوتکنیکی دارد (Fredlund *et al.*, 2000).

برای توصیف PSD خاک، معادلات مختلفی ارائه شده است که هر یک از آنها اغلب مزایا و محدودیت‌های خاص خود را دارند (Bayat *et al.*, 2015). انتخاب مناسب‌ترین مدل PSD ممکن است، تأثیر معنی‌داری در برآورد توزیع اندازه ذرات خاک در اندازه‌های معین داشته باشد. مدل‌های ریاضی مختلفی برای برآورد منحنی PSD خاک به صورت روابط

در این مطالعه، از مشخصات ۴۰ نمونه خاک مورد استفاده در پژوهش رضایی و همکاران (Rezaei et al., 2013) استفاده گردید. این نمونه‌های خاک از دشت ارومیه واقع در استان آذربایجان غربی در موقعیت ۴۵ درجه و ۱ دقیقه تا ۴۵ درجه و ۳۸ دقیقه طول شرقی و ۳۷ درجه و ۳۵ دقیقه تا ۳۷ درجه و ۴۲ دقیقه عرض شمالی تهیه شده بودند. نمونه‌ها پس از انتقال به آزمایشگاه، در معرض هوا، خشک شده و کوبیده شدند. برای تعیین دانه‌بندی نمونه‌های خاک، ۲۸ نقطه از منحنی PSD با استفاده از روش الک (Sieve Analysis) و روش هیدرومتری برای هر نمونه خاک اندازه‌گیری شد. به این ترتیب که برای تعیین توزیع ذرات بزرگتر از الک نمرة ۲۰۰، روش الک و برای ذرات ریزتر از آن، روش هیدرومتری استفاده شد (Rezaei et al., 2013). خاک باقی‌مانده روی الک نمرة ۲۰۰ از سری الک‌های ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۵، ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۷۰، ۱۰۰، ۱۲۰، ۱۴۰ و ۱۷۰ گذرانده شد. متوسط مشخصات نمونه‌های خاک مورد مطالعه در جدول ۱ ارائه شده است. نمونه‌های خاک مورد مطالعه، در پنج کلاس بافت خاک شامل رسی، لوم رسی، رس سیلتی، لوم شنی و لوم رسی شنی دسته‌بندی شدند (شکل ۱). تنوع بافت‌های خاک در این پژوهش، نسبتاً مناسب می‌باشد.

ارزیابی کارایی مدل‌های فرکتالی

برای بررسی کارایی مدل‌های فرکتالی، از هفت مدل فرکتالی مختلف به منظور برآورد منحنی توزیع دانه‌بندی خاک استفاده شد. جدول ۲ مشخصات مدل‌های فرکتالی مورد استفاده را ارائه می‌نماید. مدل‌های منتخب، کاربرد فراوانی در پژوهش‌های قبلی داشته و از مهم‌ترین و رایج‌ترین مدل‌های مورد استفاده در این زمینه می‌باشند. پارامترهای مورد استفاده در مدل‌های فرکتالی منتخب (جدول ۲) عبارتند از، $P(d)$: جرم تجمعی ذرات با قطر کمتر از d : قطر ذرات، D : بعد فرکتال، D_m : بعد فرکتال مقادیر جرمی، C : ثابت مقیاس مرکب، L ، k_2 و k و a ضرایب برازش، $M(<R_i)$ جرم تجمعی ذرات کوچکتر از R_i ، R_i حد بالایی اندازه ذرات در هر محدوده ذرات خاک، R_{max} : حداکثر شعاع ذرات عبوری از الک (دو میلی‌متر)، $\overline{R_m}$: میانگین شعاع ذرات عبوری از الک، M_t : جرم کل نمونه خاک و R : شعاع ذرات خاک می‌باشد.

پارامتری ویبول، روزین و رملر، فردلاند و ون‌گنوختن در تمام محدوده منحنی دانه‌بندی خاک انعطاف‌پذیر می‌باشند. نتایج پژوهش مذکور بیانگر این بود که مدل‌های فرکتالی (با اساس فیزیکی و ریاضی)، برای توصیف منحنی دانه‌بندی در کلاس‌های بافتی مختلف مناسب نبودند. آنها مزیت مدل‌های فرکتالی را اساس فیزیکی آنها و نیاز به تعداد پارامترهای کمتر بیان نمودند. هوانگ (Hwang, 2004) نیز قابلیت برازش مدل‌های دانه‌بندی متعددی را مورد بررسی قرار داد. او گزارش نمود از بین مدل‌های مورد مطالعه، مدل فردلاند و همکاران (Fredlund et al., 2000) برازش بهتری بر داده‌های اندازه‌گیری شده دارد. همچنین، او بیان نمود میزان رس روی دقت مدل‌ها تأثیرگذار است و با افزایش آن، دقت مدل‌ها نیز افزایش می‌یابد. افراسیابی و همکاران (Afrasiabi et al., 2019) با بررسی عملکرد ۱۹ مدل PSD گزارش نمودند دقت برازش به قطر ذرات خاک بستگی دارد و درصد خطای بیشتر در بازه بافت ریزدانه رخ می‌دهد.

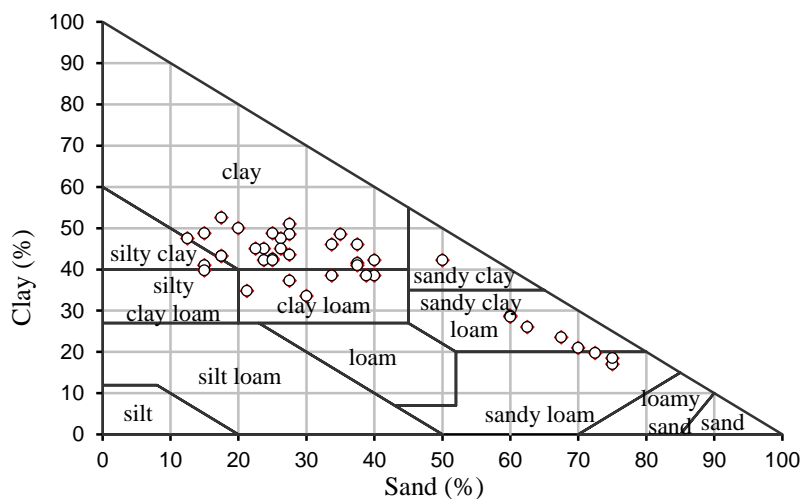
بررسی منابع نشان می‌دهد با وجود پژوهش‌های فراوان، هنوز بررسی مدل‌های ریاضی پیوسته‌ای که بتوانند با دقت بالایی بر کل بازه منحنی PSD برازش یابند، به عنوان چالش پژوهشی مهمی مطرح است. مدل‌های فرکتالی به دلیل نیاز به تعداد پارامتر کمتر در برآورد منحنی دانه‌بندی خاک، مورد توجه زیادی می‌باشند. در سال‌های اخیر، ارزیابی و مقایسه کارایی مدل‌های فرکتالی در برآورد PSD، مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. با این حال، دقت کاربرد تئوری فرکتال در برآورد توزیع اندازه ذرات خاک نیاز به پژوهش‌های بیشتری دارد. هدف اصلی این پژوهش، ارزیابی کارایی مدل‌های فرکتال در برآورد منحنی PSD خاک می‌باشد. در این ارتباط، عملکرد هفت مدل فرکتالی شامل مدل‌های مندلبرت (Mandelbrot, 1983)، پریر و همکاران (Perrier et al., 1999)، بیرد و همکاران (Bird et al., 2000)، پریر و بیرد (Perrier & Bird, 2002)، کراوچنکو و ژانگ (Kravchenko & Zhang, 1998)، تیلور و بیت‌کرفت (Tyler & Wheatcraft, 1992) و سو و همکاران (Su et al., 2004) در برآورد PSD برای پنج بافت خاک بررسی گردید.

مواد و روش‌ها

مشخصات نمونه‌های پژوهش

جدول ۱- مقدار متوسط فراوانی نسبی گروه‌های اندازه‌ای ذرات خاک‌های مورد مطالعه (%).
Table 1. Average values for relative particle size distribution of the studied soils (%)

Soil Texture	Clay	Silt	Sand
Clay	45.6	28.1	26.3
Clay Loam	36.8	31.3	31.9
Silty Clay	42.7	43.1	14.2
Sandy Loam	17.8	7.2	75.0
Sandy Clay Loam	24.6	10.0	65.4



شکل ۱- توزیع کلاس بافتی نمونه‌های خاک مورد مطالعه
Figure 1. Textural class distribution of the studied soil samples

جدول ۲- مدل‌های فرکتالی مورد استفاده در این پژوهش
Table 2. The fractal models used in this research

Models	Equations
Mandelbrot (1983)	$P(d) = Cd^{-D}$
Perrier <i>et al.</i> , (1999)	$P(d) = k+d^{3-D_m}$
Bird <i>et al.</i> , (2000)	$P(d) = Cd^{3-D_m}$
Perrier & Bird (2002)	$P(d) = (a^{D_m-3}) * (\frac{d}{L})^{3-D_m}$
Kravchenko & Zhang (1998)	$P(R) = \exp \left\{ \ln k_2 + \left(\frac{3D_m^2 - 13D_m + 14}{D_m^2 - 5D_m + 4} + 1 \right) * \ln R \right\}$
Tyler & Wheatcraft (1992)	$\frac{M(< R_i)}{M_t} = \left(\frac{R_i}{R_{max}} \right)^{3-D_m}$
Su <i>et al.</i> , (2004)	$\frac{M(< \bar{R}_1)}{M_t} = \left(\frac{\bar{R}_1}{\bar{R}_m} \right)^{3-D_m}$

درون‌یابی خطی، از نزدیک‌ترین نقاط حد بالا و پایین تعیین گردید و با مقادیر متناظر پیش‌بینی شده توسط مدل‌های مورد مطالعه، مقایسه شد.

برازش مدل‌ها از طریق رگرسیون غیرخطی و با استفاده از برنامه *Matlab* انجام گردید. همچنین، در این پژوهش، اندازه قطر ذرات اندازه‌گیری شده مربوط به ۱۰، ۳۰ و ۶۰ درصد منحنی دانه‌بندی (به ترتیب D_{60} ، D_{30} ، D_{10}) با روش

(منفی تر شدن) میزان ضریب AIC_c نیز بیانگر کاهش خطا و برازش بهتر مدل مورد نظر می‌باشد. در مدل‌هایی که داده‌ها بیش‌تر یا کمتر از حد واقعی پیش‌بینی می‌شوند، حتی اگر همه پیش‌بینی‌ها نادرست باشد، امکان اینکه مقادیر R^2 نزدیک به یک تعیین شده و عملکرد مدل به اشتباه به صورت مطلوب ارزیابی گردد، وجود دارد. استفاده از شاخص WR^2 می‌تواند از این‌گونه خطاها جلوگیری و ارزیابی دقیق‌تر و مطمئن‌تری از عملکرد مدل‌ها ارائه نماید. در تعیین شاخص WR^2 ، هرچقدر پارامتر a (عرض از مبدا در رابطه رگرسیون خطی) به صفر و پارامتر b (شیب در رابطه رگرسیون خطی) به یک نزدیک‌تر باشد، نشان‌دهنده برازش بهتر مدل خواهد بود (Krause et al., 2005; Afrasiabi et al., 2019).

نتایج و بحث

هر یک از مدل‌های فرکتالی در جدول ۲، بر منحنی PSD مربوط به ۴۰ نمونه خاک مورد مطالعه برازش داده شدند. جدول ۳ مقادیر بعد فرکتال (مقادیر میانگین، حداکثر، حداقل و انحراف معیار) حاصل از برازش هر یک از مدل‌های مذکور را نشان می‌دهد. مقادیر بعد فرکتال و محدوده تغییرات مقادیر فرکتال در مدل‌های انتخابی بدست آمده در این پژوهش (جدول ۳)، با نتایج پژوهش‌های سو و همکاران (Su et al., 2004) و قنبریان و دیاله (Ghanbarian, & Daigle, 2015) همخوانی خوبی دارند. جدول ۴ نیز، میانگین بعد فرکتال را برای پنج بافت خاک مورد مطالعه ارائه می‌نماید. نتایج جدول ۴ نشان می‌دهد که بافت خاک روی مقدار بعد فرکتال تأثیرگذار است.

برای سنجش دقت برازش و مقایسه مدل‌های PSD از روی داده‌های مشاهداتی، شاخص‌های آماری ضریب تعیین (R^2) رابطه (Shaker Shahmarbeigloo et al., 2019)، ریشه میانگین مربعات خطا ($RMSE$) رابطه ۲ (Bayat et al., 2019; Sadikhani, 2015)، ضریب آکائیک اصلاح شده (AIC_c) رابطه ۳ (Afrasiabi et al., 2019) و ضریب تبیین وزن دار (WR^2) رابطه ۴ (Krause et al., 2005) استفاده گردید.

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - O_{ave})(P_i - P_{ave})}{\sum_{i=1}^n (O_i - O_{ave})^2 (P_i - P_{ave})^2} \quad (1)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{n}} \quad (2)$$

$$AIC_c = \left(n \times \ln \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{n} + 2k + \frac{2k(k+1)}{N-k-1} \right) \quad (3)$$

$$WR^2 = \begin{cases} |b| * R^2 & \text{for } b \leq 1 \\ |b|^{-1} * R^2 & \text{for } b > 1 \end{cases} \quad (4)$$

در این روابط، n : تعداد مشاهدات، O_i : مقدار مشاهده‌ای، O_{ave} : میانگین مقادیر مشاهده‌ای، P_i : مقدار پیش‌بینی شده برای داده مورد نظر و P_{ave} : میانگین مقادیر پیش‌بینی شده، k : تعداد پارامترهای مدل و b : شیب خط برازش یافته بین مقادیر مشاهداتی و برآورد شده پارامتر مورد نظر است. در این پژوهش، به دلیل کم بودن تعداد داده‌های مشاهداتی، از ضریب آکائیک اصلاح شده (AIC_c) استفاده شد (Afrasiabi et al., 2019). هر چه میزان خطا ($RMSE$) کمتر و میزان همبستگی داده‌ها (R^2) و ضریب تبیین وزن دار (WR^2) بیشتر باشد، میزان کارایی مدل بالاتر است. کاهش

جدول ۳- تغییرات مقادیر بعد فرکتال حاصل از برازش با مدل‌های مورد استفاده

Table 3. Changes in the fractal dimension values resulting from the fitting with the models used

	Mandelbrot (1983)	Perrier et al (1999)	Bird et al., (2000)	Perrier & Bird (2002)	Kravchenko & Zhang (1998)	Tyler & Wheatcraft (1992)	Su et al, (2004)
Minimum	-1.043	2.552	1.957	1.957	2.3	1.641	1.506
Average	-0.758	2.662	2.243	2.243	2.607	2.276	2.251
Maximum	-0.456	2.882	2.604	2.603	2.843	2.627	2.619
Standard Deviation	0.128	0.089	0.132	0.132	0.116	0.117	0.192

مقدار بعد فرکتال در خاک‌های رسی و لوم رسی تعیین شد. به طور کلی، کمترین مقدار بعد فرکتال نیز در بین خاک‌های ترکیبی در تمام مدل‌ها به جز مدل پریر و همکاران (Perrier et al., 1999)، متعلق به خاک لوم شنی بود. بیات

در این پژوهش، به جز مدل پریر و همکاران (Perrier et al., 1999)، بیشترین مقدار بعد فرکتال در تمام مدل‌ها برای خاک رس‌سیلتی بدست آمد. این در حالی است که برای مدل پریر و همکاران (Perrier et al., 1999)، بیشترین

نخواهد داشت. در این پژوهش، مقدار بعد فرکتال در تمام مدل‌های مورد مطالعه، در یک محدوده منطقی قرار گرفت.

و همکاران (Bayat *et al.*, 2015) بیان نمودند شاخص فرکتال، زمانی که بیش از سه باشد، دیگر پایه فیزیکی

جدول ۴- مقادیر میانگین بعد فرکتال برای خاک‌های مورد مطالعه

Table 4. Mean value of the fractal dimension for the studied soils

	Mandelbrot (1983)	Perrier <i>et al</i> (1999)	Bird <i>et al</i> (2000)	Perrier & Bird(2002)	Kravchenko & Zhang(1998)	Tyler & Wheatcraft (1992)	Su <i>et al</i> , (2004)
Clay	-0.78	2.69	2.216	2.216	2.58	2.21	2.21
Clay Loam	-0.75	2.69	2.252	2.252	2.61	2.32	2.29
Silty Clay	-0.64	2.60	2.355	2.355	2.70	2.43	2.41
Sandy Clay Loam	-0.71	2.63	2.304	2.304	2.66	2.35	2.33
Sandy Loam	-0.82	2.63	2.184	2.184	2.57	2.24	2.21

مندلبرت (Mandelbrot, 1983)، بیرد و همکاران (Bird *et al.*, 2000) و پریر و بیرد (Perrier & Bird, 2002) دارای بهترین برازش بودند. اما در بافت لوم شنی، مدل کراوچنکو و ژانگ (Kravchenko & Zhang, 1998) مدل برتر بود. مدل پریر و همکاران (Perrier *et al.*, 1999) بیشترین خطای برازش را در تمامی بافت خاک‌های مورد نظر داشت. در این پژوهش، مدل‌های استفاده شده به جز دو مدل تیلور و ویت کرافت (Tyler & Wheatcraft, 1992) و سو و همکاران (Su *et al.*, 2004)، از مدل‌های دو پارامتری محسوب می‌شوند. بررسی کارایی مدل‌ها نشان می‌دهد، گاهی اوقات افزایش تعداد پارامتر در مدل‌های برآورد توزیع اندازه ذرات خاک، می‌تواند سبب افزایش کارایی مدل‌ها شود. هوانگ و همکاران (Hwang *et al.*, 2002) و مهدی زاده و همکاران (Mehdizadeh *et al.*, 2015) نیز گزارش کرده‌اند که افزایش تعداد پارامترها در برخی مواقع، نتایج دقیق‌تری در برازش داده‌های PSD رسوبات دارند. در پژوهش حاضر، با بررسی نتایج در هر پنج بافت خاک مورد مطالعه، می‌توان بیان کرد که از بین مدل‌های ارائه شده، مدل‌های برتر، دو پارامتری هستند. جدول ۷ مقایسه مقادیر اندازه‌گیری شده پارامترهای D_{10} ، D_{30} و D_{60} را با مقادیر برآورد شده توسط مدل‌های PSD را با استفاده از ضریب وزن دار R^2 نشان می‌دهد. افراسیابی و همکاران (Afrasiabi *et al.*, 2019) نشان دادند که در میان مدل‌های PSD ارائه شده، تنها چندین مدل در ارزیابی مقادیر D_{50} و D_{60} نسبتاً دقیق بودند.

قنبریان و هانت (Ghanbarian, & Hunt, 2012) بیان نمودند که از بافت درشت دانه به سمت بافت ریزدانه، مقدار بعد فرکتال افزایش می‌یابد. به عبارتی، هرچه خاک درشت دانه‌تر باشد، بعد فرکتال کمتر برآورد می‌شود. تیلور و ویت-کرافت (Tyler & Wheatcraft, 1992) نیز گزارش نمودند ابعاد فرکتال، با افزایش میزان رس خاک افزایش و برعکس، با افزایش درصد شن و ماسه کاهش می‌یابد. در این پژوهش نیز کمترین مقدار بعد فرکتال برای خاک لوم‌شنی تعیین شد. سو و همکاران (Su *et al.*, 2004) و ژائو و همکاران (Zhao *et al.*, 2009) رابطه خطی میان بعد فرکتال و بافت خاک ارائه نمودند. ژائو و همکاران (Zhao *et al.*, 2011) نشان دادند که بعد فرکتال یک شاخص قابل انعطاف با تغییر بافت خاک است. یعنی تغییرات بافت خاک تأثیر بسیار چشمگیری در تغییرات بازه بعد فرکتال دارد. در این پژوهش نیز، با تغییرات در بافت خاک، تغییرات ایجاد شده در مقادیر برآوردی بعد فرکتال مشهود است (جدول ۴). جدول ۵ مقادیر شاخصه‌های آماری $RMSE$ و R^2 (مقادیر داخل پرانتز) و جدول ۶ مقدار ضریب AIC_c حاصل از برازش مدل‌های فرکتال بر توزیع دانه‌بندی نمونه‌های خاک مورد مطالعه را نشان می‌دهد. بررسی نتایج مدل‌های مورد مطالعه (جدول ۵ و ۶) در بافت رس و لوم رسی نشان داد، با توجه به مقادیر مشابه $RMSE$ و R^2 ، مقایسه ضریب AIC_c بیانگر این است که مدل‌های مندلبرت (Mandelbrot, 1983)، بیرد و همکاران (Bird *et al.*, 2000) و کراوچنکو و ژانگ (Kravchenko & Zhang, 1998)، بهترین برازش را داشته‌اند. در گروه خاک‌های با بافت رس سیلتی و لوم رسی شنی، بررسی شاخصه‌های آماری نشان داد مدل‌های

جدول ۵- شاخص‌های آماری RMSE و R^2 (مقادیر داخل پرانتز) برای ۵ بافت خاک مورد مطالعهTable 5. The RMSE and R^2 (values in parentheses) indices for 5 soil texture studied

	Mandelbrot (1983)	Perrier <i>et al.</i> , (1999)	Bird <i>et al.</i> , (2000)	Perrier & Bird (2002)	Kravchenko & Zhang (1998)	Tyler & Wheatcraft (1992)	Su <i>et al.</i> , (2004)
Clay	0.060 (0.959)	0.125 (0.817)	0.60 (0.959)	0.061 (0.959)	0.060 (0.959)	0.063 (0.952)	0.70 (0.944)
Clay Loam	0.074 (0.951)	0.119 (0.858)	0.074 (0.951)	0.076 (0.951)	0.745 (0.959)	0.080 (0.940)	0.086 (0.932)
Silty Clay	0.090 (0.936)	0.107 (0.909)	0.090 (0.936)	0.091 (0.936)	0.090 (0.936)	0.097 (0.923)	0.104 (0.912)
Sandy Clay Loam	0.0704 (0.951)	0.113 (0.872)	0.071 (0.951)	0.071 (0.951)	0.070 (0.951)	0.071 (0.949)	0.077 (0.940)
Sandy Loam	0.072 (0.950)	0.013 (0.831)	0.072 (0.950)	0.073 (0.950)	0.072 (0.950)	0.080 (0.946)	0.080 (0.938)

جدول ۶- مقادیر ضریب آکائیک برای بافت‌های خاک مطالعه شده

Table 6. Akaike coefficient value for the studied soil textures

	Mandelbrot (1983)	Perrier <i>et al.</i> , (1999)	Bird <i>et al.</i> , (2000)	Perrier & Bird (2002)	Kravchenko & Zhang (1998)	Tyler & Wheatcraft (1992)	Su <i>et al.</i> , (2004)
Clay	-158.789	-111.535	-158.698	-137.374	-156.718	-152.319	-136.789
Clay Loam	-146.126	-117.274	-146.126	-146.126	-149.216	-141.707	-135.961
Silty Clay	-132.747	-122.693	-132.747	-132.747	-113.124	-127.670	-131.893
Sandy Clay Loam	-147.391	-120.438	-147.391	-147.391	-142.158	-145.812	-142.268
Sandy Loam	-146.960	-114.342	-146.960	-146.960	-178.627	-145.025	-135.483

می‌گیرد. با مقایسه تمامی شاخص‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که از بین مدل‌های نام برده شده در این پژوهش، مدل بیرد و همکاران (Bird *et al.*, 2000)، پریر و بیرد (Perrier & Bird, 2002) و کراوچنکو و ژانگ (Kravchenko & Zhang, 1998) بهترین عملکرد را برای تخمین بعد فرکتال داشتند.

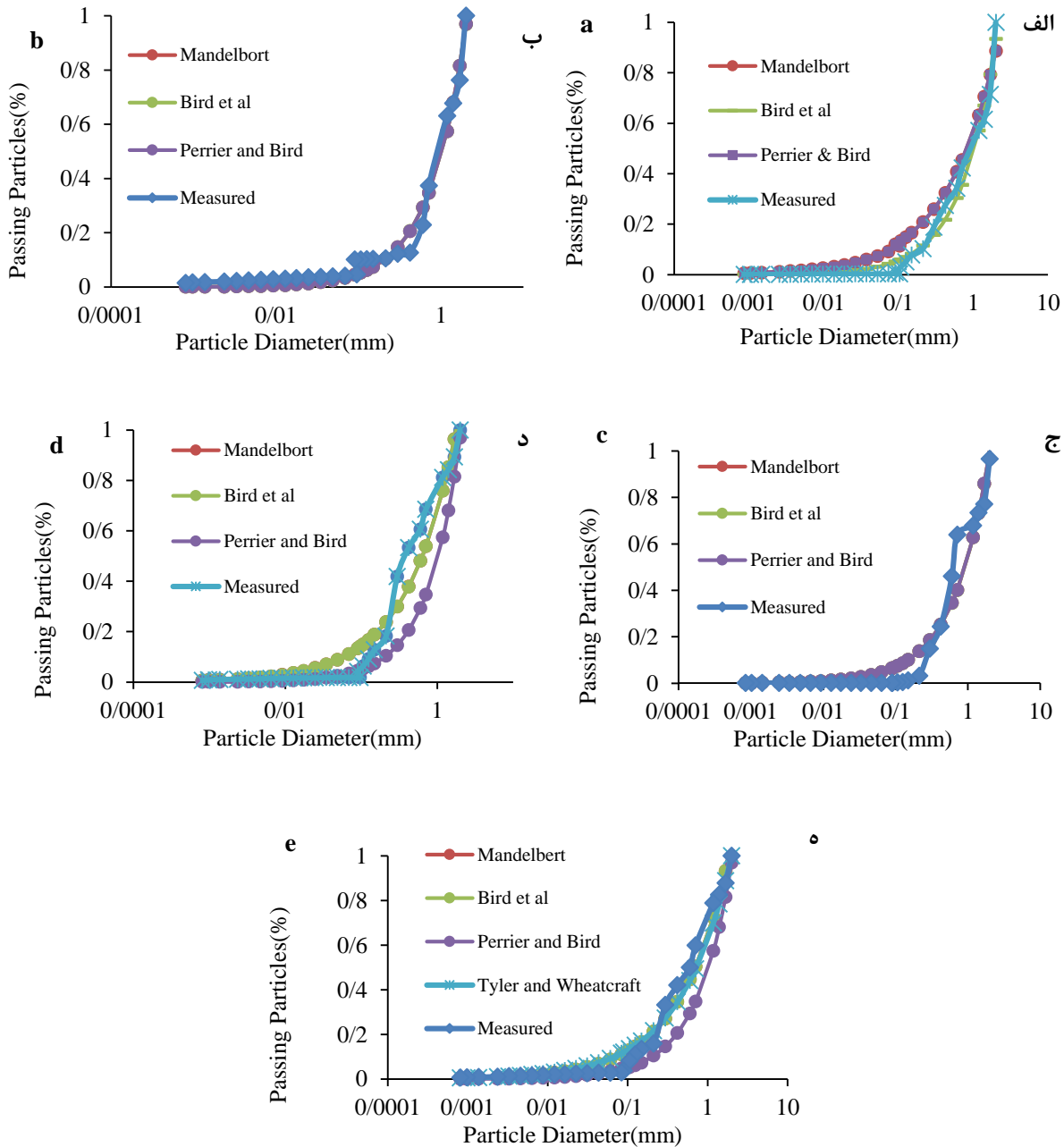
شکل ۲ الف تا ه، مدل‌های دارای بهترین برازش را برای هر بافت خاک با مقادیر اندازه‌گیری شده مقایسه می‌نمایند. بررسی این شکل‌ها نشان می‌دهد که دو مدل بیرد و همکاران (Bird *et al.*, 2000) و پریر و بیرد (Perrier & Bird, 2002) در تمامی بافت‌ها برازش بسیار نزدیکی نسبت به مقدار واقعی داشته‌اند. هنگام ارزیابی یک مدل PSD، یکی از مهمترین نکات مورد بحث، در نظر گرفتن محدوده مناسب اندازه ذرات، برای آن مدل است. همانطور که قابل مشاهده است، تغییرات قطر ذرات در قابلیت برآورد مدل‌ها تأثیر می‌گذارد.

بررسی نتایج جدول ۷ بیانگر این است که عملکرد مدل‌های فرکتالی در هنگام برآورد شاخص‌های مختلف PSD خاک، متفاوت است. در حالی که چندین مدل در تخمین D_{30} ، D_{60} نسبتاً دقیق بودند، اما تمامی مدل‌ها در تخمین D_{10} ضعیف عمل نمودند. لازم به یادآوری است که یک روش معمول برای اندازه‌گیری درصد شن، سیلت و رس خاک، قرائت هیدرومتر در زمان‌های خاص تا ته‌نشینی ذرات معلق است. این به معنای این است که ممکن است مقادیر حاصل از اندازه‌گیری در گروه‌های خاصی از اندازه ذرات، لزوماً با مقادیر واقعی برابر نباشند. همچنین، یکی از روش‌های رایج اندازه‌گیری D_{60} ، D_{30} و D_{10} ، برقراری رابطه خطی بین داده‌های اندازه‌گیری شده (داده‌های واقعی) و برازش داده شده (داده‌های پیش‌بینی شده) در منحنی دانه‌بندی خاک است. اما شایان ذکر است که منحنی PSD یک منحنی غیرخطی است. از این رو، درونیابی خطی همیشه مناسب نیست و به همین دلیل، مقادیر حاصل از مدل‌های PSD برتر مورد توجه قرار

مورد مطالعه برای پیش‌بینی پارامترهای منتخب خاک PSD (رابطه ۴) مدل‌های R^2 وزنی جدول ۷- مقادیر

Table 7. Weighted R^2 (equation 4) values of the studied particle-size distribution models to predict selected soil parameters.

	Mandelbrot (1983)	Perrier <i>et al.</i> , (1999)	Bird <i>et al.</i> , (2000)	Perrier & Bird (2002)	Kravchenko & Zhang (1998)	Tyler & Wheatcraft (1992)	Su <i>et al.</i> , (2004)
D_{60}	0.520	0.879	0.519	0.517	0.735	0.354	0.2510.251
D_{30}	0.848	0.154	0.895	0.888	0.877	0.805	0.8010.801
D_{10}	0.419	0.164	0.461	0.420	0.523	0.411	0.342



شکل ۲- مدل‌های با بهترین برازش در بافت‌های رس (الف)، لوم رسی (ب)، لوم شنی (ج)، لوم رسی شنی (د) و رس سیلتی (ه).

Figure 2. Models with the best fit in Clay (a), Clay Loam (b), Sandy Loam (c), Sandy Clay Loam (d), and Silty Clay (e) textures.

نتیجه‌گیری کلی

در این پژوهش، کارایی هفت مدل فرکتال در برآورد مشخصه‌های توزیع اندازه ذرات ۴۰ نمونه خاک با استفاده از شاخص‌های آماری مختلف بررسی گردید. نتایج نشان داد بافت خاک روی مقدار بعد فرکتال تأثیرگذار است. در بین مدل‌های مورد مطالعه، مدل پریرو و همکاران (Perrier *et al.*, 1999) بیشترین خطای برازش را در تمامی خاک‌های مورد نظر داشت. همچنین شاخص‌های آماری نشان دادند که مدل‌های فرکتال دو پارامتری نسبت به مدل‌های تک پارامتری، برازش بهتری به منحنی توزیع دانه-بندی دارند. مدل‌های PSD مطالعه شده، در

ارزیابی مقادیر D_{50} و D_{60} نسبتاً دقیق بودند، ولی تمامی مدل‌ها در تخمین D_{10} ضعیف عمل نمودند. با مقایسه تمامی شاخص‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که از بین مدل‌های فرکتال مورد مطالعه، مدل‌های بیرد و همکاران (Bird *et al.*, 2000)، پریرو و بیرد (Perrier & Bird, 2002) و کراوچنکو و ژانگ (Kravchenko & Zhang, 1998) بهترین عملکرد را برای تخمین بعد فرکتال داشتند. پیشنهاد می‌گردد پژوهش‌های بیشتری روی نمونه‌های بافت خاک متنوع‌تر با سایر بدهای فرکتالی مانند بعد فرکتال مربوط به خلل و فرج خاک و یا توسط دیگر مدل‌های فرکتالی شامل مدل‌های دو بخشی انجام شود.

References

- Afrasiabi F., Khodaverdiloo H., Asadzadeh F., van Genuchten M.Th. 2019. Comparison of alternative soil particle-size distribution models and their correlation with soil physical attributes. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, 67(2): 179-190.
- Aswathy R.K., Mathew S. 2019. Separation properties of finite products of hyperbolic iterated function systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 67: 594-599.
- Bayat H., Rastgo M., Mansourizade M., Vereeken H. 2015. Particle size distribution models, their characteristics and fitting capability: a review. *Journal of Hydrology*, 52(9): 872-889.
- Bird N., Perrier E., Rieu M. 2000. The water retention function for a model of soil structure with pore and solid fractal distributions. *Soil Science*, 51(1): 55-63.
- Ersahin S., Gunal H., Kutlu T., Yetgin B., Coban S. 2006. Estimating specific surface area and cation exchange capacity in soils using fractal dimension of particle size distribution. *Geoderma*, 136 (3): 588-597.
- Esmaelnejad L., Siavashi F., Seyedmohammadi J. 2016. The best mathematical models describing particle size distribution of soils. *Modeling Earth Systems and Environment*, 4: 1-11.
- Filgueira R.R., Fournier L.L., Cerisola C.I., Gelati P., García M.G. 2006. Particle-size distribution in soils: a critical study of the fractal model validation. *Geoderma*, 134(3): 327-334.
- Fredlund M.D., Fredlund D., Wilson G.W. 2000. An equation to represent grain size distribution. *Canadian Geotechnical Journal*, 37 (4): 817-827.
- Ghafoor A., Koestel J., Larsbo M., Moeys J., Jarvis N. 2013. Soil properties and susceptibility to preferential solute transport in tilled topsoil at the catchment scale. *Journal of Hydrology*, 49(2): 190-199.
- Ghanbarian B., Daigle, H. 2015. Fractal dimension of soil fragment mass-size distribution: A critical analysis. *Geoderma*, 245-246: 98- 103.
- Ghanbarian B., Hunt A. 2012. Unsaturated hydraulic conductivity in porous media: Percolation theory. *Geoderma*, 18(7): 77-84.
- Ghorbani Dashtaki S., Homae M., Khodaverdiloo H. 2010. Derivation and validation of pedotransfer functions for estimating soil water retention curve using a variety of soil data. *Soil Use and Management*, 26: 68-74.
- Hwang S.I. 2004. Effect of texture on the performance of soil particle-size distribution models. *Geoderma*, 123 (3): 363-371.
- Hwang S.I., Lee K.P., Lee D.S., Powers S.E. 2002. Models for estimating soil particle-size distributions. *Soil Science*, 66 (4).
- Khodaverdiloo H., Samadi A. 2011. Batch equilibrium study on sorption, desorption, and immobilization of cadmium in some semiarid-zone soils as affected by soil properties. *Soil Research*, 49 (5): 444-454.

- Krause P., Boyle D.P., Bäse F. 2005. Comparison of different efficiency criteria for hydrological model assessment. *Advanced Geosciences*, 5: 89-97.
- Kravchenko A., Zhang R. 1998. Estimating the soil water retention from particle size distributions: a fractal approach. *Soil Science*, 163 (3): 171-179.
- Mandelbrot, B.B., 1983. The fractal geometry of nature (updated and augmented edition): Freeman, New York, 468p.
- MATLAB, 2012. The MathWorks. Inc., Natick, Massachusetts, United States.
- Mehdizadeh L., Asadzadeh F., Samadi A. 2015. Application of mathematical models to describe the particle size distribution of sediments behind successive check dams. *Journal of Watershed Engineering and Management*, 4: 323-336 (In Persian)
- Millan H., Gonzalez-Posada M., Aguilar M., Domínguez J., Cespedes L. 2003. On the fractal scaling of soil data. Particle-size distributions. *Geoderma*, 117(1): 117-128.
- Nimmo J. 2004. Porosity and pore size distribution. *Encycl. Journal of Soil Environment*, 3: 295-303.
- Obour P.B., Schjønning P., Peng Y., Munkholm L.J. 2017. Subsoil compaction assessed by visual evaluation and laboratory methods. *Soil and Tillage Research*, 173: 4-14.
- Perrier E., Bird N. 2002. Modelling soil fragmentation: the pore solid fractal approach. *Soil and Tillage Research*, 64(1): 91-99.
- Perrier E., Bird N., Rieu M. 1999. Generalizing the fractal model of soil structure: the pore–solid fractal approach. *Geoderma*, 88(3), 137-164.
- Rezaei E., Behmanesh J., Mohammadnejhad B., Zeinalzadeh K. 2013. Evaluation of pedo-transfer functions for saturated hydraulic conductivity prediction on saline fields of Urmia Lake, *Master Thesis, Urmia University*. (In Persian)
- Sadikhani M. R. 2019. Prediction of Cation Exchange Capacity using fractal dimension of soil particle size distribution. *Applied Soil Research*, 7 (2):56-66. (In Persian)
- Shaker Shahmarbeigloo P., Khodaverdiloo H. and Momtaz H.R. 2019. Testing of new inputs to predict nearsaturated soil hydraulic conductivity. *Applied Soil Research*, 7(1): 54-69. (In Persian)
- Shi Z., Fang N., Wu F., Wang L., Yue B., Wu G. 2012. Soil erosion processes and sediment sorting associated with transport mechanisms on steep slopes. *Journal of Hydrology*, 454: 123-130.
- Su Y.Z., Zhao H.L., Zhao W.Z., Zhang T.H. 2004. Fractal features of soil particle size distribution and the implication for indicating desertification. *Geoderma*, 122: 43-49.
- Tyler S.W., Wheatcraft S.W. 1989. Application of fractal mathematics to soil water retention estimation. *Soil Science Society of America*, 53 (4): 987-996.
- Tyler S.W., Wheatcraft S.W. 1992. Fractal scaling of soil particle-size distributions: analysis and limitations. *Soil Science Society of America*, 56 (2): 362-369.
- Vereecken H., Weynants M., Javaux M., Pachepsky Y., Schaap M.G., van Genuchten M.Th. 2010. Using pedotransfer functions to estimate the van Genuchten–Mualem soil hydraulic properties: a review. *Vadose Zone*, 9 (4): 795-820.
- Vipulanandan C., Ozgurel H.G. 2009. Simplified relationships for particle size distribution and permeation groutability limits for soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 135(9): 1190-1197.
- Xiao L., Xue S., Liu G., Zhang C. 2014. Fractal features of soil profiles under different land use patterns on the Loess Plateau, China. *Journal of Arid Land*, 6: 550-560.
- Zhao P., Shao M., Horton R. 2011. Performance of soil particle-size distribution models for describing deposited soils adjacent to constructed dams in the China Loess Plateau. *Acta Geophysica*, 59: 124-138.
- Zhao P., Shao M., Zhuang J. 2009. Fractal features of particle size redistributions of deposited soils on the dam farmlands. *Soil Science*, 174: 403-407.

The Performance of Fractal Models in Estimating Soil Particle Size Distribution

Sevda Shabani¹, Kamran Zeinalzadeh^{2*}, Elnaz Rezaei³

(Received: November 2019 Accepted: December 2019)

Abstract

Particle size distribution (PSD) is one of the most important soil physical properties. Determining soil PSD using low-cost, rapid, and accurate methods is of interest to researchers. In this research, performance of seven fractal models to estimate PSD characteristics of 40 samples in five soil textural classes, including clay, clay loam, silty clay, sandy loam, and sandy clay loam was investigated using different statistical indices. For this purpose, 28 points of the soil PSD curve were measured using either sieve or hydrometric method for each soil sample. Fitting of the PSD models was performed by nonlinear regression using the *Matlab* program. The results showed the effect of soil texture on the fractal dimension value. Among the models studied, Perrier *et al.* (1999) model had the most fitting error for all soil textures. Also, Bird *et al.* (2000), Perrier & Bird (2002) and Kravchenko & Zhang (1998) models had the best performance in fractal dimension estimation. The statistical indices showed that two-parameter fractal models have a better fit for the soil PSD curve than single-parameter ones. The studied PSD models were relatively accurate in estimating D_{60} and D_{50} values. The results of this study indicated that fractal models can be reasonably capable of estimating soil PSD characteristics.

Keywords: Fractal, Porous media, Particle size distribution models, Soil texture, Soil physical properties

Shabani S., Zeinalzadeh K. and Rezaei E. 2021. The performance of fractal models in estimating soil particle size distribution. *Applied Soil Research*, 8(4): 158-168.

1. Graduated MSc, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture and Natural Resources, Urmia University, Urmia, Iran

2. Associate Professor, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture and Natural Resources, Urmia University, Urmia, Iran

3. Former Ph.D. Candidate, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture and Natural Resources, Urmia University, Urmia, Iran

* Corresponding Author Email: k.zeinalzadeh@urmia.ac.ir